Varianta 13

Subiectul I.

a) $|4-6i| = 2\sqrt{13}$.

b) $AC = \sqrt{2}$.

c) $S = 0$.

d) $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$.

e) Aria triunghiului *ABC* este $S = \frac{3}{2}$.

f) $a = 0$ şi $b = 1$.

Subiectul II.

1.

a) În $\mathbf{Z}_8$ avem $\hat{2}^{2006} = \hat{0}$.

b) $E = 1$.

c) $x = 5$.

d) $x = \frac{5}{4}$.

e) Probabilitatea este $p = \frac{2}{5}$.

2.

a) $f'(x) = 5x^4 + 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{6}$.

c) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$.

d) $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n + 3}{5\ln n - 2} = \frac{2}{5}$.

Subiectul III.

a) $f_2(1) = -1$.

b) $f_3(x) = x^3 - 3x$, pentru $x \in \mathbf{R}$.

c) Calcul direct.

d) Se folosesc f_1 și f_2, iar pentru $k \in \mathbf{N}^*$, se presupune că $f_k(2\cos x) = 2\cos kx$ și $f_{k+1}(2\cos x) = 2\cos(k+1)x$ și se demonstrează că $f_{k+2}(2\cos x) = 2\cos(k+2)x$.
e) Se demonstrează prin inducție, folosind relația de recurență din enunț.
f) Deoarece pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, coeficientul dominant al funcției f_n coincide cu cel al funcției f_{n-1} și termenul liber al funcției f_n coincide cu cel al funcției $-f_{n-2}$, afirmația din enunț se demonstrează prin inducție.

g) Pentru $r \in \mathbf{Q}$, există $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $r = \dfrac{p}{q}$.

Din **d)**, avem că $f_q(2\cos r\pi) = 2\cos p\pi \in \{-2, 2\}$.

Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, considerăm funcțiile $g_n, h_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g_n(x) = f_n(x) - 2$, $h_n(x) = f_n(x) + 2$.
Dacă $f_q(2\cos r\pi) = -2$, numărul $\alpha = 2\cos r\pi \in \mathbf{Q}$ este o rădăcină a funcției h_q, iar dacă $f_q(2\cos r\pi) = 2$, numărul $\alpha = 2\cos r\pi \in \mathbf{Q}$ este o rădăcină a funcției g_q.
Din **e)** și **f)** obținem că $\alpha = 2\cos r\pi \in \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$ și deci $\alpha = 2\cos r\pi \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, de unde rezultă $\cos r\pi \in \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

Subiectul IV.
a) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}}$ și $\dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}}$, de unde rezultă concluzia.
b) Se folosește punctul **a)**.
c) Trecând la limită în prima inegalitate obținută la punctul **b)**, avem:
$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty}\left(2\sqrt{n+1} - 2\right) = +\infty.$$
d) Din **b)** obținem $\dfrac{2\sqrt{n+1} - 2}{\sqrt{n}} < \dfrac{x_n}{\sqrt{n}} < \dfrac{2\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n}}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.
Trecând la limită în dubla inegalitate anterioară și folosind criteriul cleștelui, găsim $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{n}} = 2$.

e) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $y_{n+1} - y_n = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\right) \overset{\text{a)}}{<} 0$, deci șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.
f) Scăzând $2\sqrt{n}$ în dubla inegalitate din **b)** obținem:
$-2 < 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - 2 < y_n < -1$, $\Leftrightarrow$ $-2 < y_n < -1$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.
Șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent, fiind strict descrescător și mărginit inferior.

g) Din **f)** rezultă că $-2 < y_n \le -1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Trecând la limită în inegalitatea anterioară, obținem $-2 \le \lim_{n\to\infty} y_n \le -1$ şi cum şirul $(y_n)_{n\ge 1}$ este strict descrescător, rezultă $-2 \le \lim_{n\to\infty} y_n < -1$.